

新北市 102 學年度中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：彈珠漫『談』——談起有趣的『巴斯卡三角』

關 鍵 詞： 巴斯卡三角、排列組合、機率

編 號：

彈珠漫談—有趣的『巴斯卡三角』

摘要

從夜市彈珠台玩彈珠遊戲開始，我們從彈珠滾落的軌跡，隱藏『巴斯卡三角』數學概念。由此進入『巴斯卡三角』的數學世界，從『巴斯卡三角』之中發現它在國中數學代數的應用，以及它在高中數學排列組合、機率的使用，非常廣泛，讓我們窺得『巴斯卡三角』豐富的堂奧。

壹、研究動機

今年寒假爸爸帶我到台北的寧夏夜市吃小吃，夜市有很多遊戲，其中『玩彈珠』的遊戲我最喜歡，我們玩了 200 元，覺得很不過癮，爸爸為了我竟然還花了 500 元，買了一個小型迷你『彈珠台』讓我玩，真的好感謝他！為了不辜負老爸的苦心，開學後我居然將這個迷你『彈珠台』帶到學校玩，讓班上同學也能一同分享我生命中的小小喜悅！沒想到，下課間我們玩『彈珠台』的哄堂笑聲，不小心地驚動到正在埋案批改作業的導師，他覺得好奇，略帶關心的神情信步走到我們身後，端詳了好一陣子，隨後笑笑的說：「你們玩的這個彈珠台遊戲，我小時候也很愛玩，而且這個遊戲裡頭還藏有許多數學的觀念，或許我們還可以用這個遊戲作為我們今年數學科展的題目喲！加油！！」

導師從他小學到大學的學習歷程，逐一搜索腦海的思維，竟湧出許多思緒與感受，他說：「彈珠台(圖 1)的遊戲分布情形與它的路徑分布(一分為二)所形成的機率分布圖(圖 2)是一致的，發現有此現象的第一人是西方的巴斯卡，他繪出彈珠滑落的路徑與彈珠堆疊的情形圖(圖 3)，這個圖即是後來我們所說的『巴斯卡三角』」。

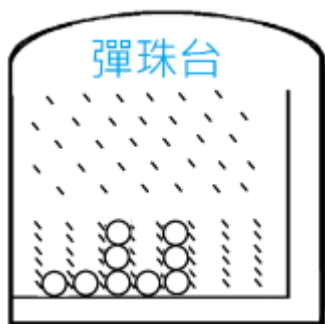


圖 1 迷你彈珠台
(自行手繪)

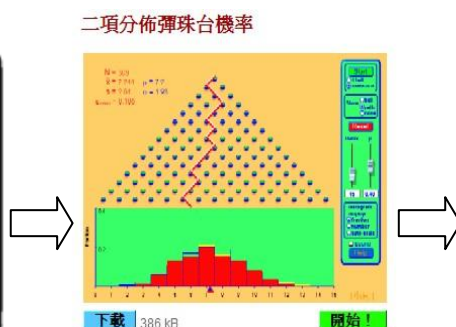


圖 2 二項分佈彈珠台機率
(取自
http://phet.colorado.edu/sims/plinko-probability/plinko-probability_zh_TW.html)



圖 3 巴斯卡三角
(取自
<http://www.skhsbs.edu.hk/math/inmath2/inmath2.files/mathematician.files/pascal.html>)

因為導師的引導，我們遂以『巴斯卡三角』這個題目為題，作為我們科展的題目。想不到，爸爸買彈珠台『無心插柳』的舉動，竟觸發成我們進行數學科展這個『小小成蔭』，這都得感謝導師提供的靈感與發想。

貳、研究目的

1. 『巴斯卡三角』的基本概念

- 2.『巴斯卡三角』衍生的數學觀念
- 3.『巴斯卡三角』多方面的應用

參、研究器材

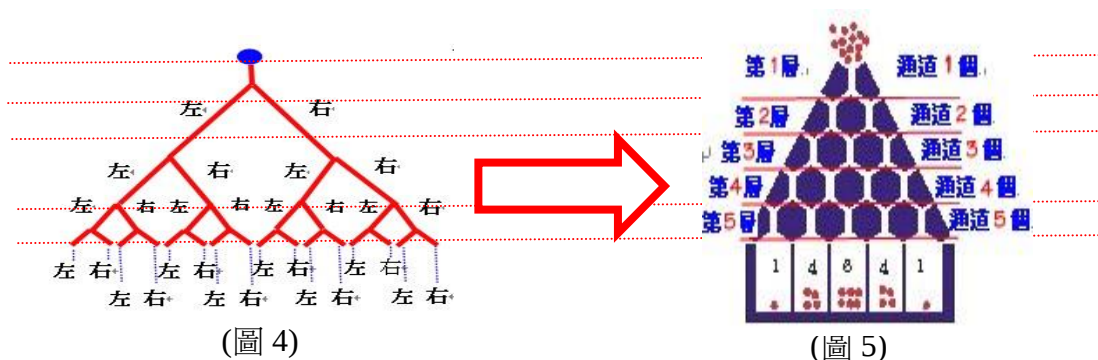
- 一、一個小型彈珠台
- 二、紙與筆
- 三、統計表
- 四、電腦軟體 Word2007 和 PhotoImpact 12(繪圖、記錄、分析、與推論之用)

肆、研究過程與方法

研究過程一：

我們試著從彈珠自彈珠台上方任一處滾落，其滾落的路徑皆為二選一(非左即右)之模式(如下圖 4 所示)，古人云：『歧路亡羊』，其意如此！球(彈珠)遇歧路，路中有路，其路皆會遭遇『左』與『右』兩路，無論『左』路，抑或『右』路，皆會『路中有路』，路分「左」、「右」二路，無窮無盡！

接著我們將上述之圖 4 試著轉化成西方人巴斯卡所畫的圖形(圖 5)，以利探討，因為巴斯卡所繪之圖形(後人稱為巴斯卡三角)，除了將圖 4 的路轉畫成工整的蜂窩狀通道，其圖形最下方處猶畫有各通道(路徑)，彈珠可能落入之球數，更能有意義表達其存在的數學意涵。



研究過程二：

『巴斯卡三角』的數學意涵(暫以 5 層結構作為討論)

右圖(圖 5)即可說明『巴斯卡三角』的基本概念，此圖係是彈珠滑落的軌跡與彈珠落下後的堆疊分布情形圖，我們從圖中觀察到許多隱藏其中的數學概念：

(1)圖 5 之外觀基本說明：

圖 5 係在一塊傾斜的木板上釘上一個個正六角形(如蜂窩狀)的小木塊隔板，小木塊與小木塊之間保有彈珠滾落的通道，彈珠自木板上方的漏斗口滑落，經過一層又一層蜂窩狀的正六角形隔板，順著通道隨機自然的滾落到下方底部的長方框子中。

(2)圖 5 之內在情形變化：

隨著彈珠滾落的數量不同，會有不同的彈珠堆疊分布情形；隨著蜂窩狀的正六角



形隔板數量的不同，對應底部的長方框子也會有數量的變化，若再隨以滾落彈珠的數量變化，則彈珠堆疊分布的情形，會有更多的不同變化。『巴斯卡三角』正是用來說明上述彈珠滾落的情形變化，『巴斯卡三角』的數學概念即是其中的變化脈絡與規則，這正是我們所要研究的重點。

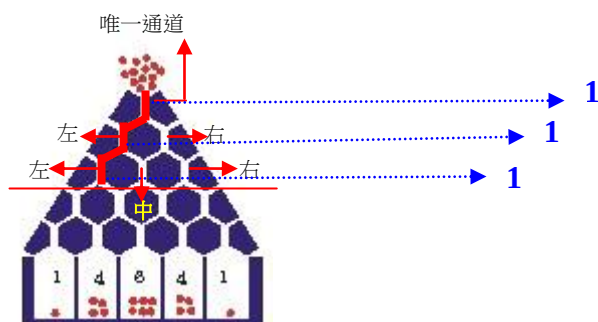
(3)彈珠滑落的簡易情形說明：

彈珠自漏斗口上方滑落，經過第 1 層正六角形隔板唯 1 通道(僅 1 種可能情形)；
繼之，會經過第 2 層正六角形隔板的 2 個通道中的其中一個(有 2 種可能情形)；
繼之，會經過第 3 層正六角形隔板的 3 個通道中的其中一個(有 3 種可能情形)；
繼之，會經過第 4 層正六角形隔板的 4 個通道中的其中一個(有 4 種可能情形)；
繼之，會經過第 5 層正六角形隔板的 5 個通道中的其中一個(有 5 種可能情形)；
最後，彈珠會滑落 5 個長方框子中的其中一個。

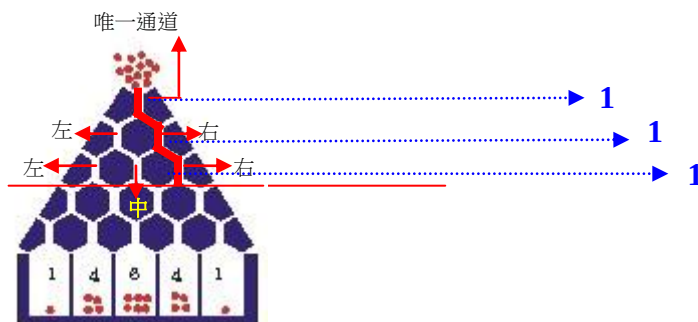
(4)彈珠滑落的詳細情形說明：

彈珠自漏斗口上方滑落，經過第 1 層隔板時，其滾動路徑僅有 1 種選擇；但經過第 2 層時，可以選擇的滾動路徑有 2 種選擇(可分左、右)；經過第 3 層時，可以選擇的滾動路徑有 3 種選擇(可分左、中、右)，故，先暫以 3 層結構來討論：

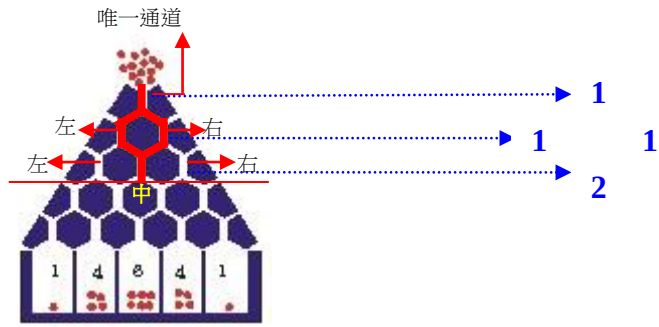
①彈珠若能滾到第 3 層的左側通道，則這顆彈珠在滾到第 2 層時，第 2 層的左側通道是彈珠必然的選擇路徑，否則彈珠自第 1 層滾落，不經第 2 層的左側通道是絕對無法到達第 3 層的左側通道，圖示如下：



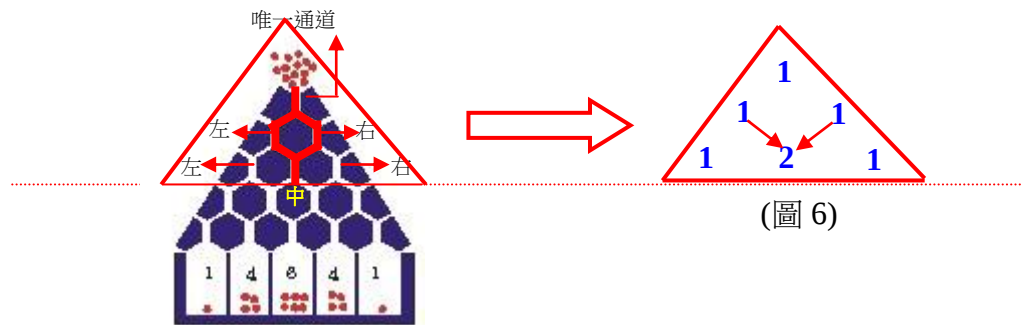
同理②彈珠若能滾到第 3 層的右側通道，則這顆彈珠在滾到第 2 層時，第 2 層的右側通道是彈珠必然的選擇路徑，否則彈珠自第 1 層滾落，不經第 2 層的右側通道是絕對無法到達第 3 層的右側通道，圖示如下：



③彈珠若能滾到第 3 層的中間通道，這顆彈珠在滾到第 2 層時則有 2 種選擇的可能路徑，它可以選擇左側或右側的通道皆可，如下圖所示：

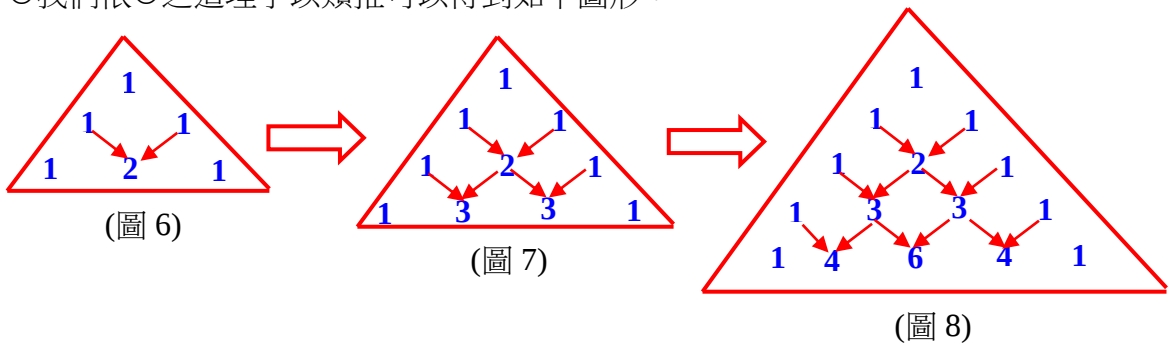


最後，將上述①、②、③整合起來，統整繪圖如下：

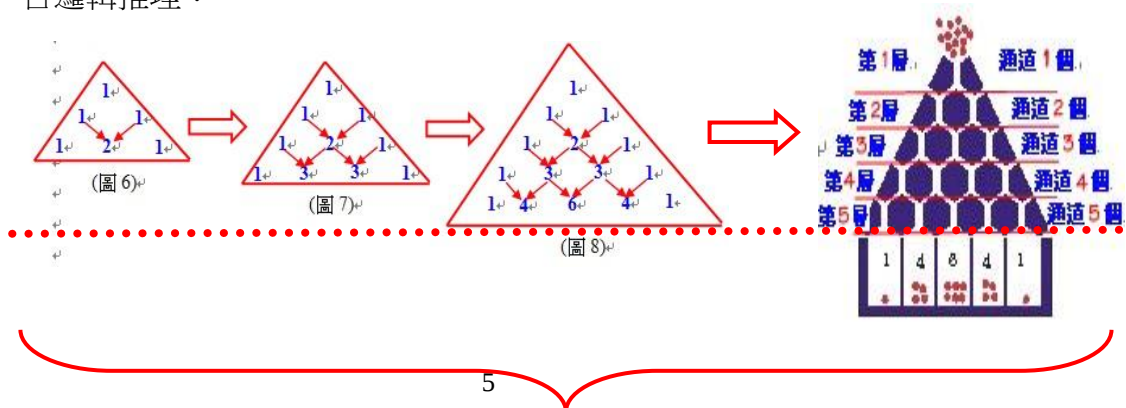


④我們從上①、②、③可以統整得到圖 6，圖 6 係說明了彈珠自上方滾落遇第一次分歧處，此時通道一分为二(分成左、右二路)，彈珠接著無論選擇左路或右路，又會再遭遇第二次分歧處，此時通道依然一分为二(分成左、右二路)，但其中有一關鍵處，即是圖 6 之『2』係是鄰近的歧路相連通成一個新的『Y』字叉口，此新的『Y』字叉口的下方總匯數字值(2)恰是由上方處兩路分歧之數字值的總和($1 + 1$)，以數學式表示為 $1 + 1 = 2$

⑤我們依④之道理予以類推可以得到如下圖形：



我們從上面的三個圖形(圖 6、圖 7 與圖 8)亦可反推對照上面的圖 5，果然符合邏輯推理：





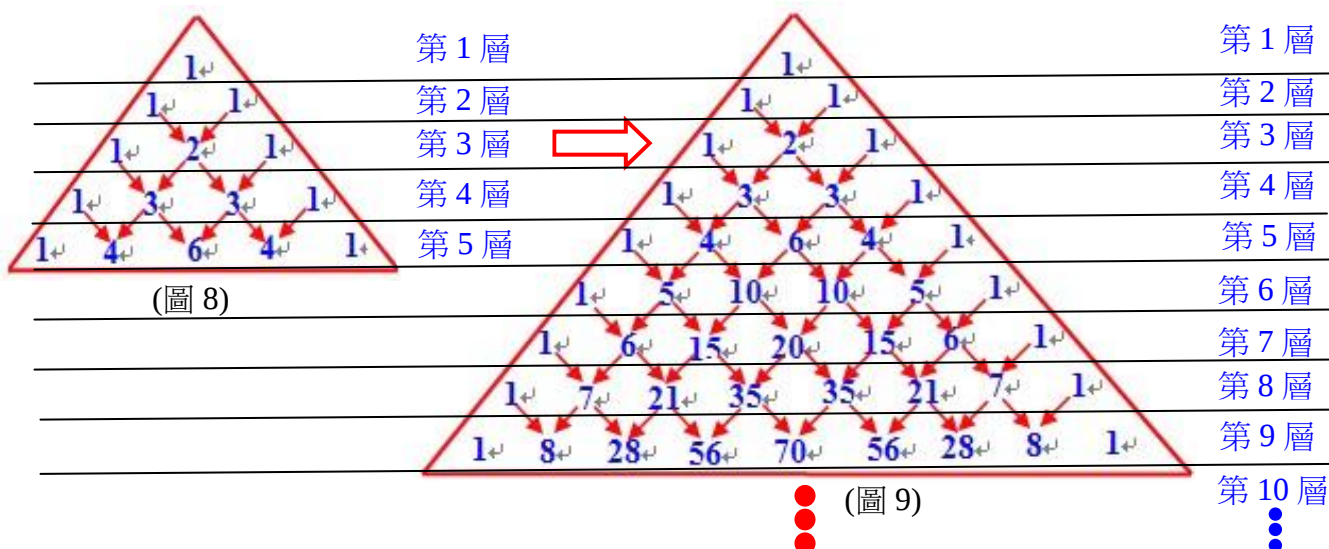
從上面的推理，我們可以得知：

依機率之常態分配云，若有 16 顆彈珠球自通道頂端上方紛紛滾落，順著通道之機率分配，彈珠落入通道的五個木框中的數量分布，依『巴斯卡三角』之推論應當是 1、4、6、4、1，意即：

- ①第一個木框中會落入 1 顆彈珠，佔所有 16 顆彈珠之機率分配為 16 分之 1。
- ②第二個木框中會落入 4 顆彈珠，佔所有 16 顆彈珠之機率分配為 16 分之 4。
- ③第三個木框中會落入 6 顆彈珠，佔所有 16 顆彈珠之機率分配為 16 分之 6。
- ④第四個木框中會落入 4 顆彈珠，佔所有 16 顆彈珠之機率分配為 16 分之 4。
- ⑤第五個木框中會落入 1 顆彈珠，佔所有 16 顆彈珠之機率分配為 16 分之 1。

研究過程三：

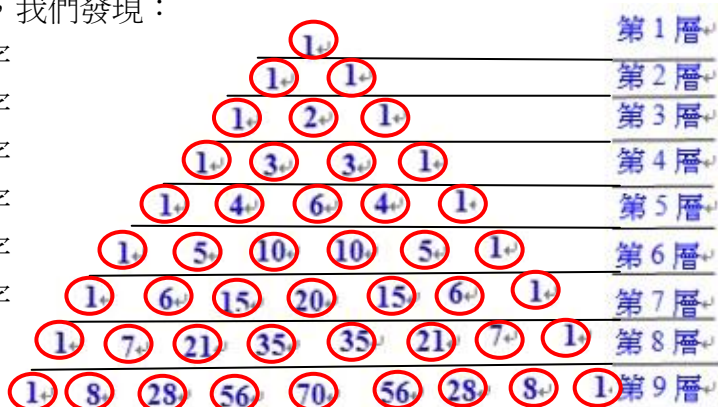
我們延續上面研究二之④與⑤之推論所得(圖 8；已推理 5 層)予以繼續類推，可以得到下圖(圖 9；已推理 9 層)，而真正的巴斯卡三角是無限多層，可以不停延續下去，但因篇幅有限緣故，後續我們的推理皆以圖 9 之圖形為基本的推理模型：



(1)我們從上圖(圖 9)觀察到『巴斯卡三角』(我們權且以九層架構做示範)有許多特性：

將『巴斯卡三角』由上而下逐層分析，我們發現：

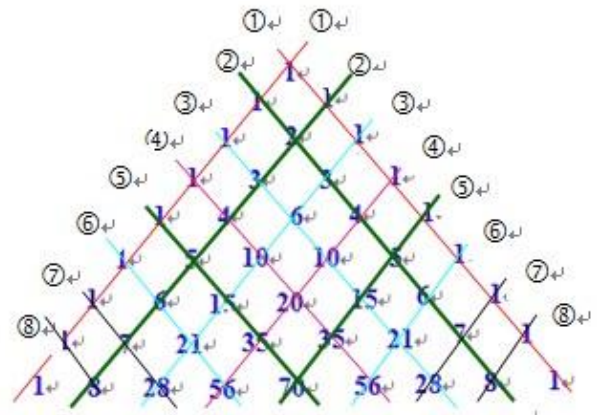
- ①『巴斯卡三角』的第 1 層有 1 個數字
- ②『巴斯卡三角』的第 2 層有 2 個數字
- ③『巴斯卡三角』的第 3 層有 3 個數字
- ④『巴斯卡三角』的第 4 層有 4 個數字
- ⑤『巴斯卡三角』的第 5 層有 5 個數字
- ⑥『巴斯卡三角』的第 6 層有 6 個數字



- ⑦『巴斯卡三角』的第 7 層有 7 個數字
- ⑧『巴斯卡三角』的第 8 層有 8 個數字
- ⑨『巴斯卡三角』的第 9 層有 9 個數字，上述九層架構依序堆疊成三角形，像埃及金字塔狀，在西方，為法國人巴斯卡最先發現，故稱『巴斯卡三角』。

(2)我們從下圖(圖 10)九層之『巴斯卡三角』觀察到：

- ①『巴斯卡三角』的兩側斜邊都是由數字 1 組成的。
- ②『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 2 條數列皆為『1、2、3、4、5、6、7、8』。
- ③『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 3 條數列皆為『1、3、6、10、15、21、28』
- ④『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 4 條數列皆為『1、4、10、20、35、56』。
- ⑤『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 5 條數列皆為『1、5、15、35、70』。
- ⑥『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 6 條數列皆為『1、6、21、56』。
- ⑦『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 7 條數列皆為『1、7、28』。
- ⑧『巴斯卡三角』的兩側斜邊內的第 8 條數列皆為『1、8』。



(圖 10)

(3)我們從下圖(圖 11)九層之『巴斯卡三角』，觀察到『巴斯卡三角』的中間軸線為對稱軸(此軸線上的數列為：『1、2、6、20、70』)，這條軸線兩側的數字都是相同的，呈現對稱性，我們用各種顏色的圓圈標示出來，以利區分與觀察。

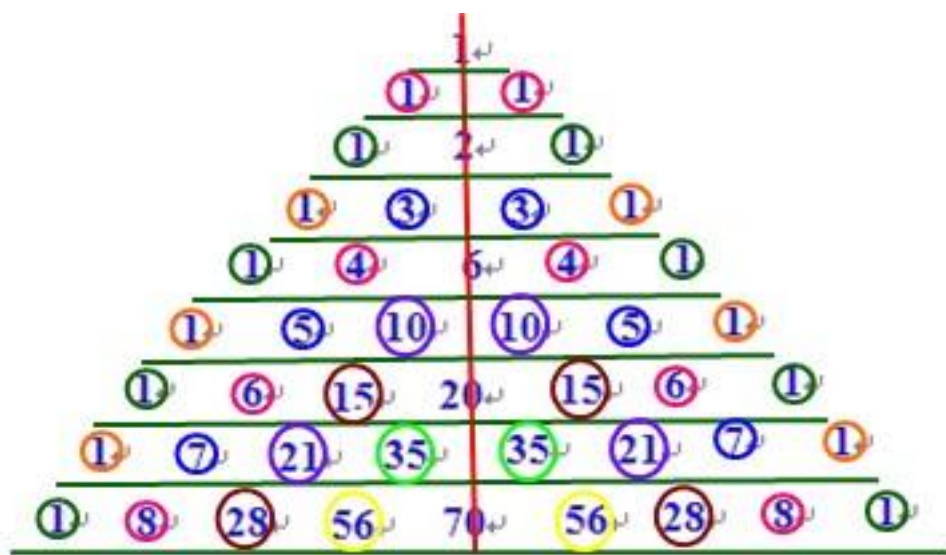
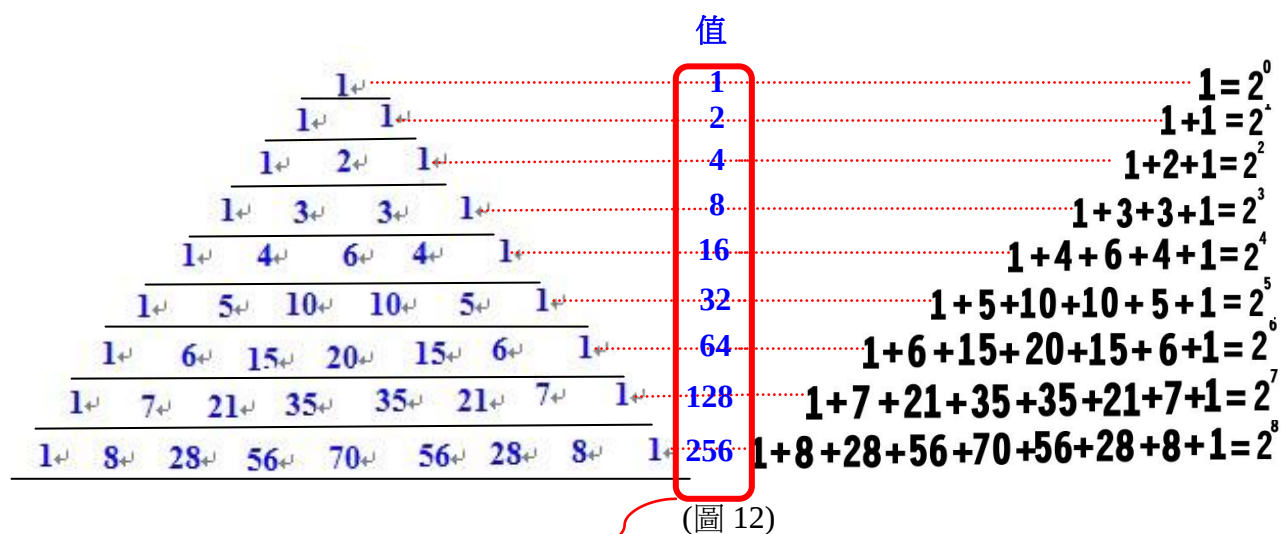


圖 11

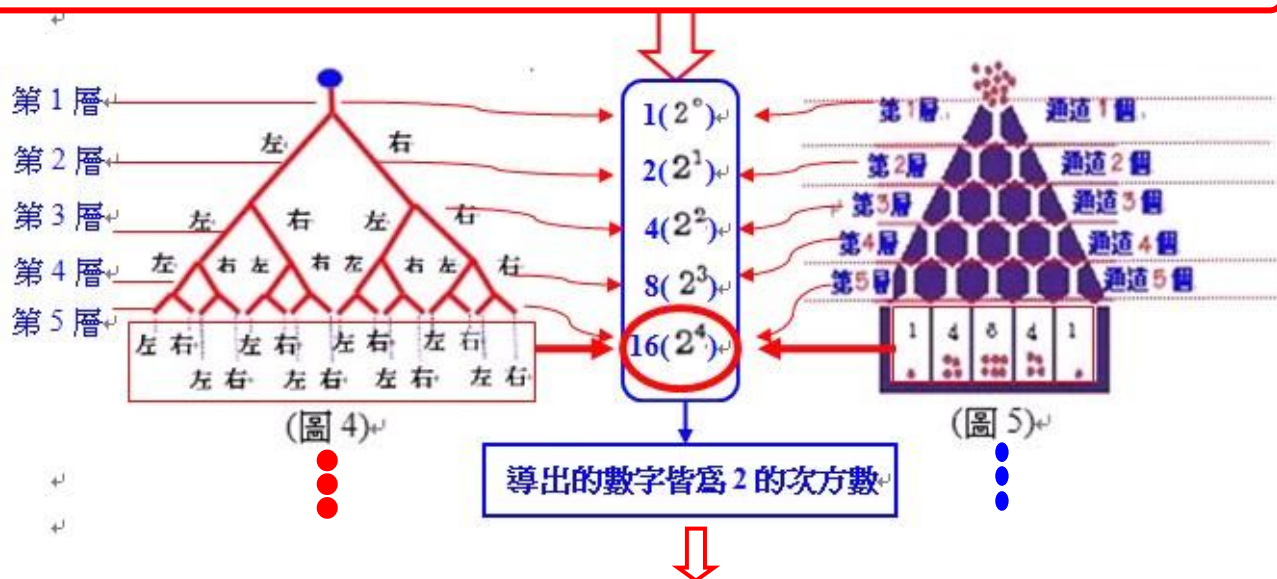
(4)我們從下圖(圖 12)九層之『巴斯卡三角』，由上而下逐層觀察，發現『巴斯卡三角』中的每一層的數列之所有數字相加總的值皆為 2 的次方數，數值愈來愈大且其次

方呈現遞升的現象〔由 2 的零次方(值=1)開始升至 2 的 8 次方(值=256)〕，如下兩圖所示：

『巴斯卡三角』每一層數列的數字加總值皆為 2 的次方數，如下圖示：

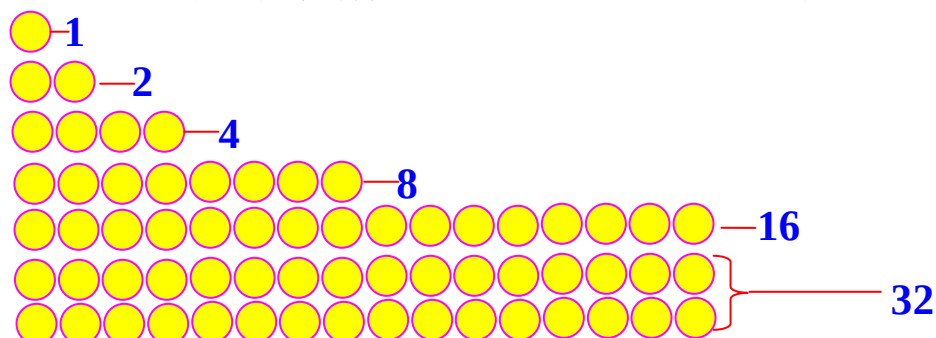


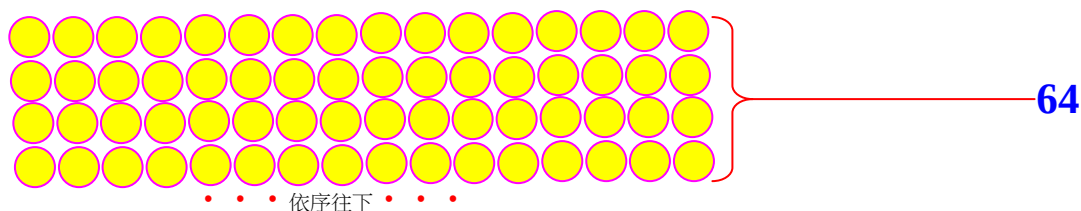
上圖 12 之每一層數列值：1，2，4，8，16，32，64，128，256...為 2 的次方數，亦呈等比級數。



我們推导出『巴斯卡三角』每一層數列的值皆為 2 的次方數且呈等比級數後，接著即要討論後續的『二項式定理』，將『巴斯卡三角』與『二項式定理』這兩間者做個呼應。

2 的次方數係從 1 開始，乘以 2 倍，再乘以 2 倍，再依序一路乘以 2 倍到底...到無窮無盡...，我們如何來計算這些 2 的次方數的總和呢？我們想了一個小小的方法：





$$\begin{aligned}
 &1+2+4+8+16+32+64+\dots \\
 &=1+2+2+2+2+2+2+\dots \text{ (這時，先在 1 旁邊多加個 1，在式子最後再減 1，如下所示：)} \\
 &=1+1+2+2+2+2+2+2+\dots -1 \\
 &=2+2+2+2+2+2+2+\dots -1 \\
 &=2+2+2+2+2+2+\dots -1 \\
 &=2 \cdot 2 + 2+2+2+2+\dots -1 \\
 &=2 \cdot 2^2 + 2+2+2+\dots -1 \\
 &=2 \cdot 2^3 + 2+2+\dots -1 \\
 &=2 \cdot 2^4 + 2+\dots -1 \\
 &=2 \cdot 2^5 + 2^6 + \dots -1 \\
 &=2 \cdot 2^6 + \dots -1 \\
 &\quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{2^n - 1}
 \end{aligned}$$

經過上面式子的反覆計算，我們得到最後的結果為 2^n ，但因為事先預借一個 1，

所以最後必須將這個 1 還掉，故真正的結果是：『 $2^n - 1$ 』。

我們也推得了下面這個公式：

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+\dots+2^{n-1}=2^n-1$$

伍、研究討論

討論一：

就讀高中的哥哥，無意間看到我們正在研究『巴斯卡三角』，臉上竟露出一股祕密的微笑說：『這是個好題材！』『巴斯卡三角』與你們即將要唸的國中數學的二項式定理有關

聯性。』我們丈二腦袋摸不著邊，根本一頭霧水，哥哥要我們趁此機會問學校老師：「『巴斯卡三角』與二項式定理的關聯性。」經老師說明後，我們得知，原來國中的『二項式定理』與『巴斯卡三角』是有所聯繫的，國中數學的代數有提到如下公式：

$$(1) (a+b)^1 = a+b$$

$$(2) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(4) (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(5) (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$



可以繼續類推下去

.....

從上面討論一(1)、(2)、(3)、(4)、(5)的五個『二項式定理』算式，我們可以得知下列①與②兩個式子：

- ①以 $(a+b)^3$ 的算式展開後的係數為 1、3、3、1，即是『巴斯卡三角』第 4 層的數列。
- ②以 $(a+b)^5$ 的算式展開後的係數為 1、5、10、10、5、1，即是『巴斯卡三角』第 6 層的數列。

所以，我們依上推論的道理，也可推得下面算式③：

- ③以 $(a+b)^6$ 的算式展開後的係數為 1、6、15、20、15、6、1，即是『巴斯卡三角』第 7 層的數列。



可以繼續類推下去

故，依此道理， $(a+b)$ 的 7 次方、8 次方、9 次方……之算式的係數，皆可循『巴斯卡三角』層列架構找出它們的相關係數。

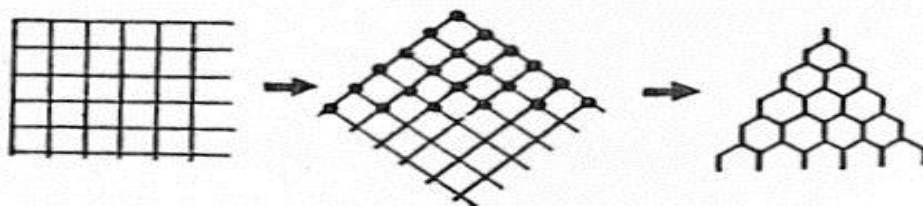
最後，我們統整得知：

『巴斯卡三角』可以當做是『二項式定理』的乘方經過分離係數法後，所列出的表。我們可以一般地說： $(a+b)^n$ 的展開式的係數就是『巴斯卡三角』中的第 $n+1$ 行的數字。

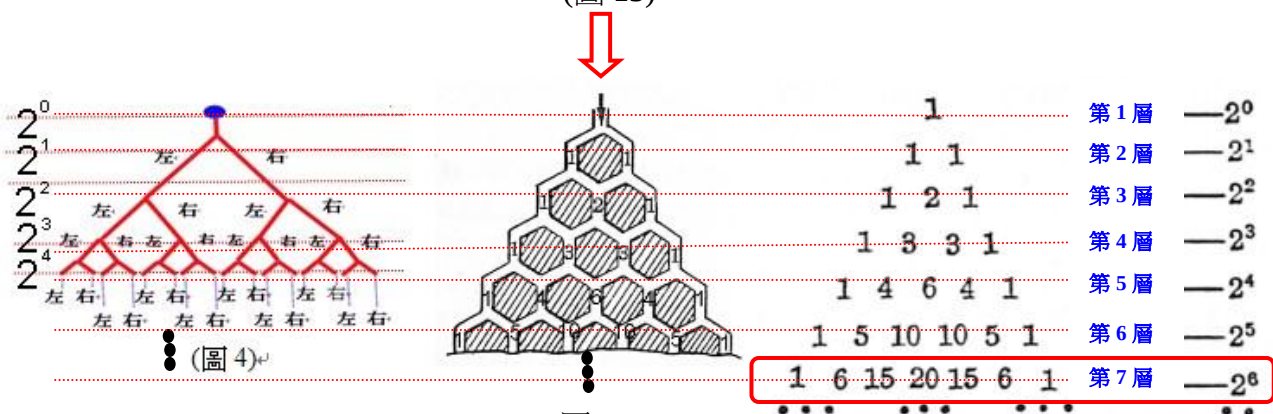
討論二：

接下來，我們試著用高中數學『排列組合』的概念來詮釋討論一：

我們可以將『巴斯卡三角』想像成一種奇特的歧路網，這也可以看成是平時日常生活中正規的棋盤方格道路的一種變形與美化，如下圖(圖 13)所示：



(圖 13)

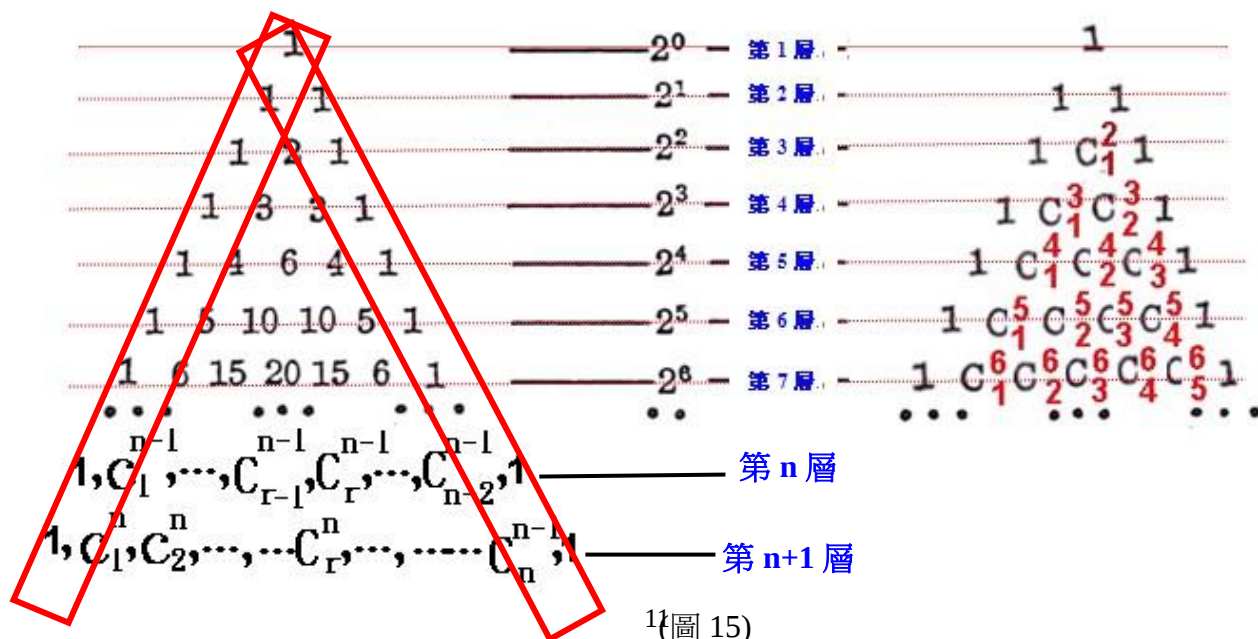


(圖 14)

『巴斯卡三角』第 n 排的數字和，即是上面圖 14 中左側的圖 4(歧路亡羊圖)中第 n 次分叉後的總共歧路數，其數字值可以記成『 2^n 』，舉例而言：上面圖 14 中右側的圖的最後一列(由上而下數來第 7 層)的數字依序為 1、6、15、20、15、6、1，其數字和如下：

$$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$$

故，為了方便起見，我們運用高中數學『排列組合』的概念，將『巴斯卡三角』第 n 排的除開頭“1”以外的第 r 個數字記為『 C_r^n 』。這樣做有一個優點，即是之後想了解『巴斯卡三角』之任何位置會有多少可能的路線，毋需多加思考，立即知道是 C_r^n 條。我們透過下面兩圖的轉換，可以通曉上述所要傳達的概念：



(圖 15)

接著，我們可以用記號 C_r^n 來表示下面的數：

$$C_r^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

而記號 $n!$ 〔(同樣 $r!$ 與 $(n-r)!$)〕，我們知道它是代表從1到 n 的連乘積如下：

1到 n 的連乘積 $=n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1$ ，稱為 n 的階乘。

另外，我們從排列組合的數學概念可以知道 C_r^n 的意義如下：

C_r^n = 從 n 件東西中取出 r 件東西的組合數(有多少種情形)

從上圖(圖15)中我們發現『巴斯卡三角』的兩側斜邊都是由數字『1』所組成的，而其餘的數都等於它肩上兩側的兩個數相加。例如： $2=1+1$ ； $3=1+2$ ； $4=1+3$ ； $6=3+3$ ；…。而整個的『巴斯卡三角』就是按照這個規則而形成的。在一般的情形下，可知下面情形：

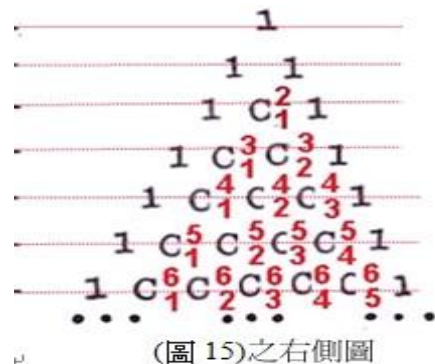
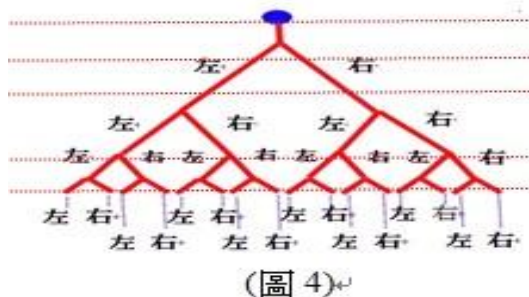
$$\begin{aligned} C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} [r + (n-r)] \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= C_r^n \end{aligned}$$

這說明了，上述算式中的任一數 C_r^n 等於它肩上的兩數 $C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$ 的和。最後，我們通權達變的將本來看似沒有意義的記號 C_0^n 和 C_n^n 令它們分別等於1和0，這樣就可以把上面的算式結果整理成如下的關係式：

$$C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} = C_r^n, (r=1, 2, \dots, n),$$

而稱它為『巴斯卡三角』的恆等式，這正是『巴斯卡三角』最基本的性質。

討論三：



接下來，我們要討論的是機率論中挺重要的課題……『獨立重複試驗』（如上圖圖 15 之右側圖），我們從下面『投擲錢幣』的例子，可以看到它與『巴斯卡三角』之間的關連非常緊密。以擲幣為例，我們可以將擲幣中出現的正面與反面的可能，當做『巴斯卡三角』中向左和向右的路線(如上圖之圖 4)。

n 次擲幣的可能情形	可能出現數
全正	1
1 次反，n-1 次正	C_1^n
2 次反，n-2 次正	C_2^n
3 次反，n-3 次正	C_3^n
.....	...
r 次反，n-r 次正	C_r^n
.....	...
全反	1
2^n	

從上面(圖 15 之右側圖)可以看出，『巴斯卡三角』中的第一排(1, 1)，就相當於擲第一枚幣時出現的(正, 反)可能；而第二排的(1, 2, 1)，就相當於重覆擲兩枚幣時出現 (兩正，一正一反，兩反) 的可能，而第三排中的(1, 3, 3, 1)，就相當於重覆擲三枚幣時出現 (三正，二正一反，二反一正，三反) 的可能，如此等等。這樣，『巴斯卡三角』中的第 n 排各數，與擲 n 枚幣出現的各種可能性的數目有上表的對等關係。

因此，我們得出，重覆 n 次擲幣，出現 r 次正面或反面的機率為：

$$p_r^n = C_r^n \cdot \frac{1}{2^n}$$

例如：擲 6 次幣，出現三次正面的機率為：

$$p_3^6 = C_3^6 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{20}{64} = 0.3125$$

上式的 $C_3^6 = 20$ ，是可以從『巴斯卡三角』表中相對應的位置查到。當然了，上面的擲幣，其每次出現正面或反面的機會皆是相同的，假如某一事件出現的機率是 p，那麼在 n 次試驗中，該事件恰好出現 r 次的機率是多少呢？這個問題，我們只要了解『巴斯卡三角』的原理，透過上面圖四(『巴斯卡三角』的向左與向右走路線圖)，我們可以知道：任何到達 ' C_r^n ' 的路線，都必須是剛好向右走的 r 次，那向左走即 n-r 次，所以，我們假設將『向右走』視為相當於『事件的發生』，

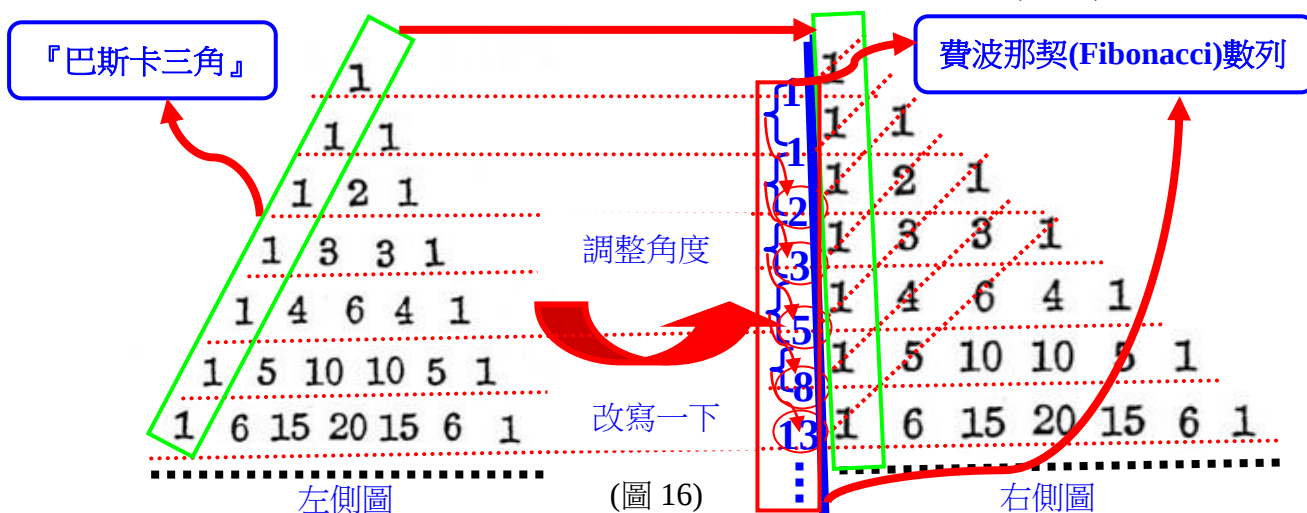
那『向左走』即是『事件的不發生』，那麼，任何一條到達「 C_r^n 」位置路線的機率均為「 $p^r \cdot (1-p)^{n-r}$ 」，其中(1-P)是事件不發生的機率，再從上面推導分析知道：到達「 C_r^n 」的線路數即是 C_r^n ，故，我們可得 n 次試驗中，事件出現 r 次的機率公式如下：

$$P_r^n = C_r^n \cdot P^r (1-P)^{n-r}$$

上述式子的推導過程有點曲折婉轉，但整個式子卻顯得非常簡潔單純。

討論四：

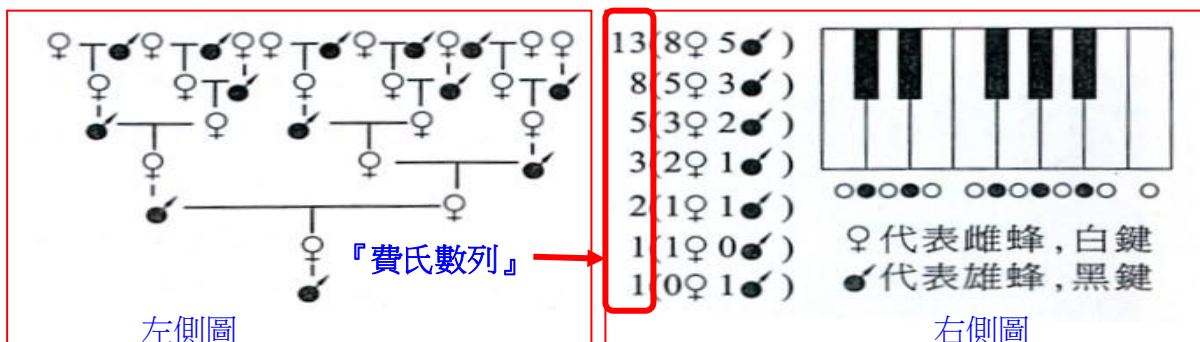
我們試著將『巴斯卡三角』調整一下角度，即可得到下面的圖形(圖 16)。我們將『巴



斯卡三角』改寫一下，即可成為上圖(圖 16)之右側圖形，即是將『巴斯卡三角』左側一整排斜列的 1 調整成垂直對齊之直排的 1，這時，我們可以看到沿著圖中斜斜的虛線，這虛線與水平線成 45 度的夾角，再將虛線劃過的數字予以累計加總，所得之和標示在虛線左下，竟成一系列數列，此數列上的數字依序如下：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... 此即數學上頗具盛名的費波那契(Fibonacci)數列(簡稱費氏數列 Fibonacci sequence；此數列係由 1, 1 出發，任一後項等於前兩項相加所構成。)

由『巴斯卡三角』輾轉變換而來的『費氏數列』時常存在大自然界，有時在人類間也存有此數列現象，請看下面兩個圖形〔(圖 17)和(圖 18)〕，即可得知：



(圖 17)，引用自『數學的發現趣談』一書，第 226 頁

上圖(圖 17)左側係自然界蜜蜂之繁衍族譜系圖，自然界之雄蜂是由未受精的蜂卵

所孵化而成，只有母親而無父親，恰如『費氏數列』之由『1』初始，頗為貼切。之後，進一步羅列雄蜂之譜系，即如上圖左側呈現，我們發現由一隻雄蜂所演化的歷代祖先個數，形成一個『費氏數列』(Fibonacci sequence)：

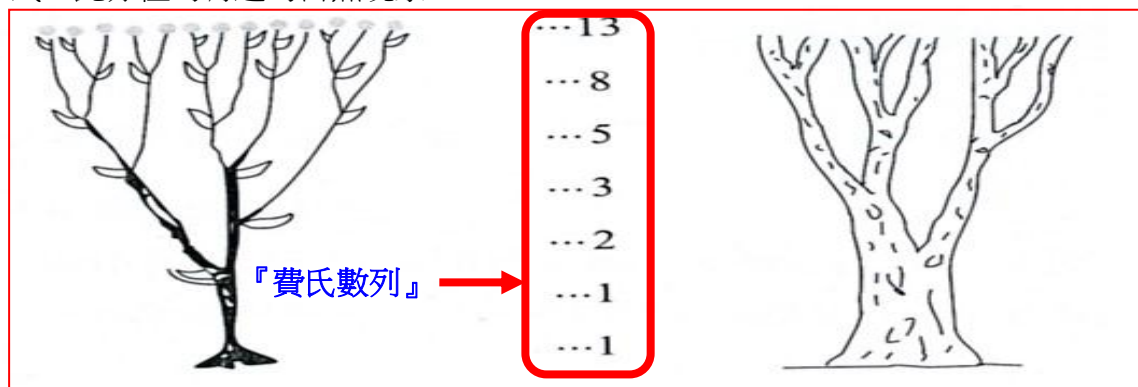
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

此『費氏數列』的特性如下：

由首兩項的數字 1, 1 出發，任何一個後項數字皆為前面兩項數字的和。

其中必須一提的是，上面圖 17 之右側圖(鋼琴之琴鍵圖)恰可從上面圖 17 之右側圖(雄蜂譜系圖)擷取出來，也就是說：我們若將雄蜂譜系的各代祖先位置排列整齊妥適，其第七代的 13 位祖先剛好可以排成鋼琴八度音之間的 13 個半音階(正好似 8 個白鍵；5 個黑鍵)，不可不謂之神奇！

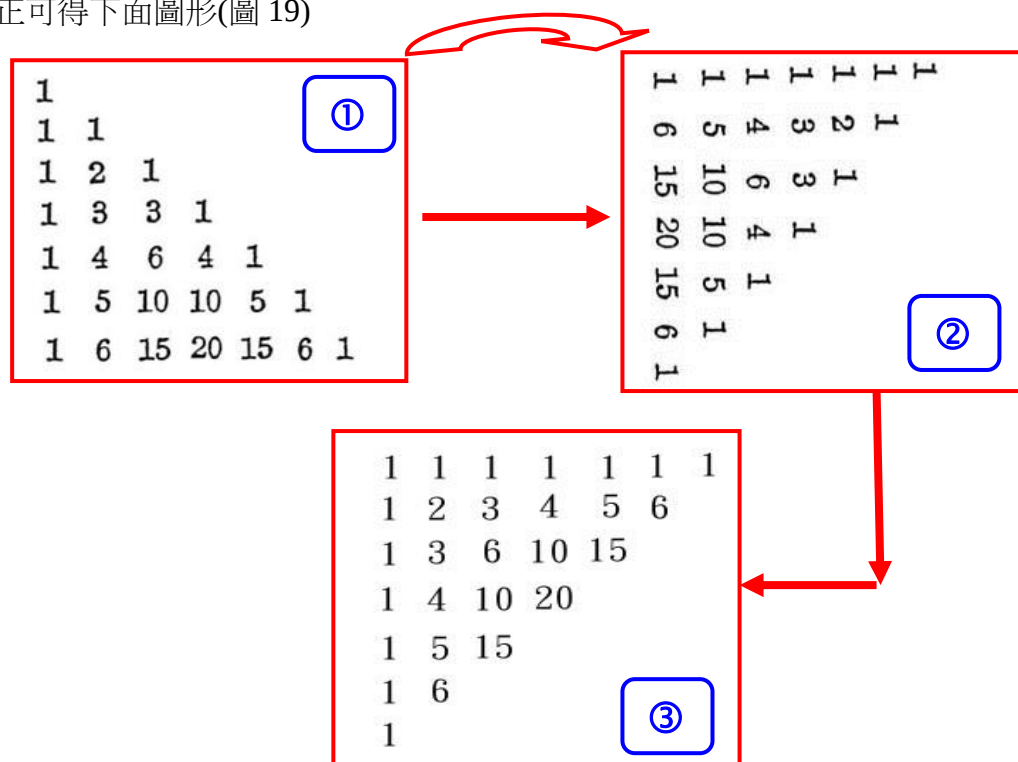
另外，除了上述『雄蜂譜系』，有時大自然也不經意的存有『費氏數列』的現象，即如下圖(圖 18)所示，花草、樹木的枝桠與枝幹的分枝成長亦符合『費氏數列』的模式，此亦極為有趣的自然現象。



(圖 18)，引用自『數學的發現趣談』一書，第 226 頁

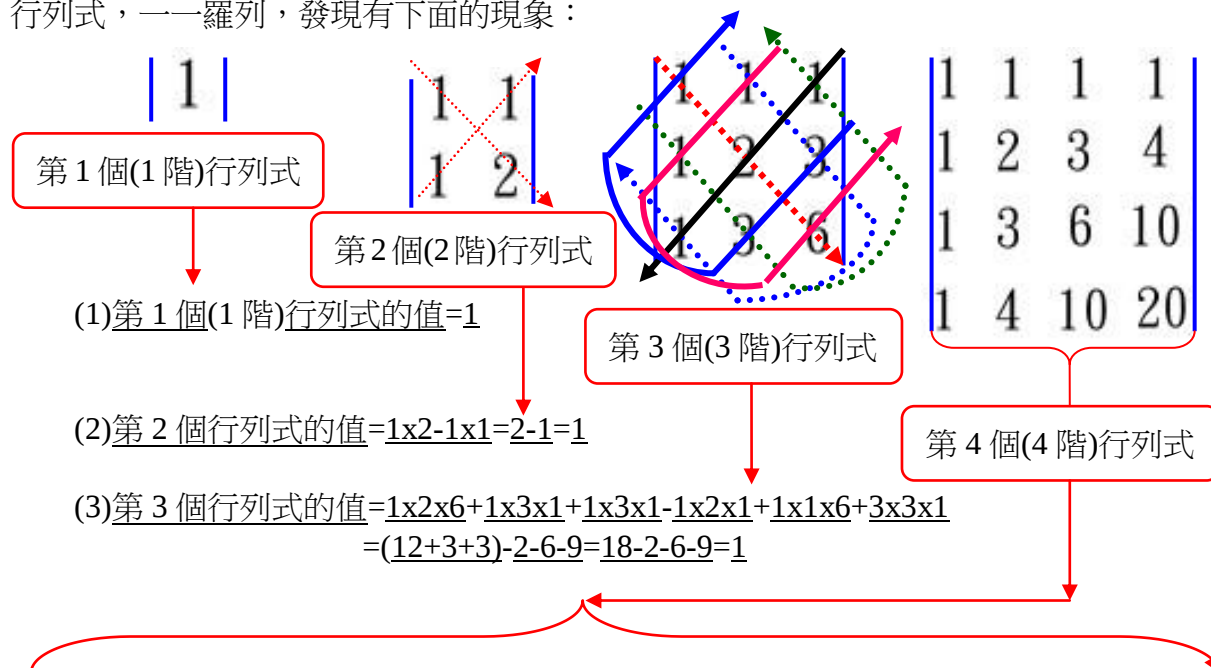
討論五：

我們將圖 16 的右側圖也略做角度的旋轉(向右旋轉 90 度)調整，並將圖中的數字皆轉正可得下面圖形(圖 19)



(圖 19)

我們從上圖(圖 19)中之左上角依序由小而大擷取出四個(1 階、2 階、3 階、4 階)行列式，一一羅列，發現有下面的現象：



(1)第 1 個(1 階)行列式的值=1

(2)第 2 個行列式的值= $1 \times 2 - 1 \times 1 = 2 - 1 = 1$

(3)第 3 個行列式的值= $1 \times 2 \times 6 + 1 \times 3 \times 1 + 1 \times 3 \times 1 - 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 6 + 3 \times 3 \times 1$
 $= (12 + 3 + 3) - 2 - 6 - 9 = 18 - 2 - 6 - 9 = 1$

第 4 個(4 階)行列式的算式如下：

$$= (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} - (4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

我們先將(1)、(2)、(3)、(4)各自計算出來，過程如下：

$$+ (1) 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 2 \times 6 \times 20 + 3 \times 10 \times 4 + 3 \times 10 \times 4 - 4 \times 6 \times 4 - 3 \times 3 \times 20 - 10 \times 10 \times 2$$

$$= 240 + 120 + 120 - 96 - 180 - 200$$

$$= 4$$

$$- (2) 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times 20 + 3 \times 10 \times 1 + 1 \times 10 \times 4 - 4 \times 6 \times 1 - 3 \times 1 \times 20 - 10 \times 10 \times 1$$

$$= 120 + 30 + 40 - 24 - 60 - 100$$

$$= 6$$

$$+ (3) 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 20 + 2 \times 10 \times 1 + 1 \times 4 \times 4 - 4 \times 3 \times 1 - 2 \times 1 \times 20 - 10 \times 4 \times 1$$

$$= 60 + 20 + 16 - 12 - 40 - 40$$

$$= 4$$

$$- (4) 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 10 + 2 \times 6 \times 1 + 1 \times 4 \times 3 - 3 \times 3 \times 1 - 2 \times 1 \times 10 - 6 \times 4 \times 1$$

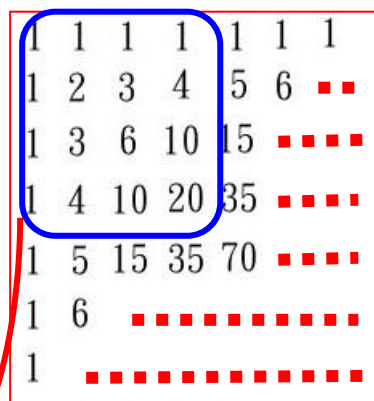
$$= 1$$

故，第 4 個(4 階)行列式的算式： $(1) - (2) + (3) - (4) = 4 - 6 + 4 - 1 = 8 - 7 = 1$

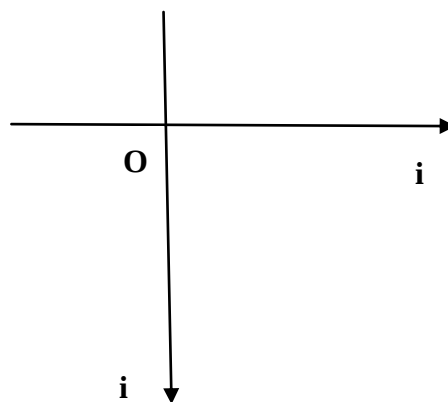
從上面四個(1 階、2 階、3 階、4 階)行列式的值皆為 1，我們猜想：從『巴斯卡三角』調整後的圖形(圖 19)的左上角擷取任何 n 階行列式，其值皆會為 1。

討論六：

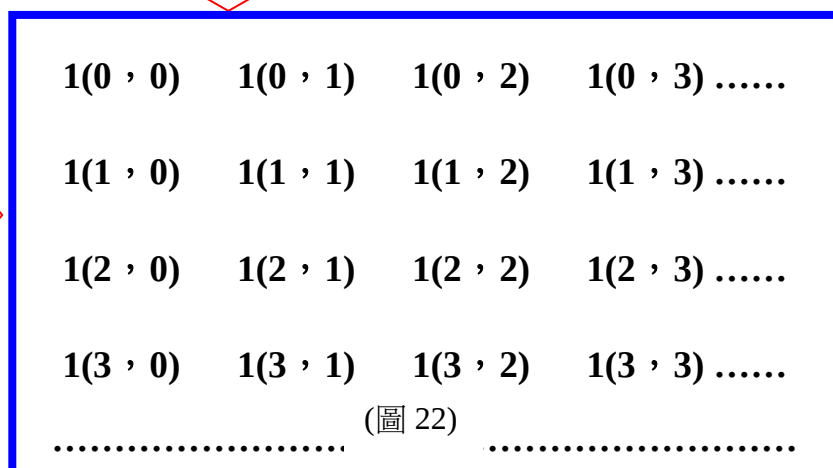
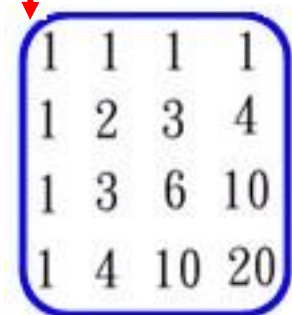
我們將圖 16 的右側圖也略做角度的旋轉(向右旋轉 90 度)調整，並將圖中的數字皆轉正可得下面圖形(圖 20)，接著我們將圖 20 中之『巴斯卡三角』的數字予以坐標化，可以下圖(圖 22)，我們稱它為四行四列的矩形『巴斯卡三角』圖。



(圖 20)



(圖 21)



(圖 22)

陸、研究結果

研究結果一：

『巴斯卡三角』的圖形係由彈珠滾落往右或往左(二選一)所形成之足跡路徑圖。

研究結果二：

將『巴斯卡三角』圖形予以轉換，呈現不同圖形的風貌，這是『巴斯卡三角』變化有趣的地方。

研究結果三：

我們觀察到『巴斯卡三角』有以下幾個特性：

- (1)『巴斯卡三角』堆疊有順序性，呈現三角形狀像埃及金字塔狀。
- (2)『巴斯卡三角』兩側斜邊的數字整列皆呈相同性。
- (3)『巴斯卡三角』內的數字呈現對稱性如下：
以『巴斯卡三角』的中間軸線為對稱軸(此軸線上的數列為：『1、2、6、20、70』)，
這條軸線兩側的數字都是相同的且呈現對稱性。
- (4)『巴斯卡三角』每一層數列的數字加總值皆為 2 的次方數，且其每一層數列值：1，
2，4，8，16，32，64，128，256…為 2 的次方數，亦呈等比級數。
我們將上述之 2 的次方數加以總和，可以推導得到下列算式：

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

研究結果四：

(1)討論後結果 1：

『巴斯卡三角』可以當做是『二項式定理』的乘方經過分離係數法後，所列出的表。

(2)討論後結果 2：

『巴斯卡三角』的兩側斜邊都是由數字『1』所組成的，而其餘的數都等於它肩
上兩側的兩個數相加。

(3)討論後結果 3：

『投擲錢幣』的機率與『巴斯卡三角』有著緊密的關連。

(4)討論後結果 4：

由『巴斯卡三角』輾轉變換而來的『費氏數列』時常存在大自然界，有時在人
類間也存有此數列現象。

(5)討論後結果 5：

從『巴斯卡三角』調整後的圖形(圖 19)的左上角擷取 1 階、2 階、3 階、4 階之
行列式，其值皆為 1，我們猜想：從『巴斯卡三角』調整後的圖形的左上角擷
取任何 n 階行列式，其值亦皆會為 1。

(6)討論後結果 6：

我們可以將『巴斯卡三角』的數字予以坐標化，如圖(圖 22)〔我們稱為四行四
列之『巴斯卡三角』矩形圖〕，係是我們用局部的『巴斯卡三角』圖形所做成。

柒、研究結論與心得

『彈珠台』的遊戲看似簡單，幾個球道，幾顆彈珠球，我們透過彈珠滾落的路徑，由一路徑分成左右兩路，再從左右兩路另外的各自的左右兩路，即有四路，此四路再依樣分化出其各自之左右兩路，而有 8 路……如此生生不息，無窮無盡，延續不斷……其衍生之路徑圖恰成三角形之形成，在東方中國稱為『楊輝三角』(亦稱『賈憲三角』)；在西方稱為『巴斯卡三角』。而『楊輝三角』猶較『巴斯卡三角』發現早數百年，但西方在『巴斯卡三角』的演繹與推理較為詳細豐富，我們沿用與推論採行較多，故仍以『巴斯卡三角』為名，引用之。

從『彈珠台』的遊戲路徑圖，藏有『巴斯卡三角』的圖形，其圖形隱含豐富的數學概念，其間圖形轉化而成的數字，經過一些排列組合與堆疊，產生許多有意義的數學推論，這實在超出當初我們所想像的。最後，經由科展的研究，我們獲得許多寶貴的研究結果，這是我們直接的收穫；經過科展的訓練與考驗，練就了我們團隊合作的默契，也培養了細心和耐心，這是我們額外的收穫。

捌、參考資料及其他

華羅庚（1995）。中國數學史上的幾大成就。臺北市：九章。

張遠南（1996）。偶然中的必然。新竹市：凡異。

華羅庚（2003）。從楊輝三角談起。香港：智能教育。

蔡聰明（2009）。數學拾貝（初版五刷）。臺北市：三民。

蔡聰明（2010）。數學的發現趣談（二版一刷）。臺北市：三民。

二項分佈彈珠台機率之參考網址：

http://phet.colorado.edu/sims/plinko-probability/plinko-probability_zh_TW.html

巴斯卡三角之圖例網址：

<http://www.skhsbs.edu.hk/math/inmath2/inmath2.files/mathematician.files/pascal.html>

康軒數學 5 下第七單元：比率與百分率